• Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

α) Μέσω Gauss με μερική οδήγηση

β) Μέσω LU παραγοντοποίησης του A, με P·A όπου P μεταθετικός

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Εντοπίζω το max στοιχείο της $1^{ης}$ στήλης

$|2|>|1|>0$ και χρησιμοποιώ τον μεταθετικό

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ώστε } \underline{P_1 \cdot Ax = P_1 \cdot I_3}$$

Άρα, θα προκύψει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} X_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε, μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τη στήλη του 2 παίρνοντας τον εξής πίνακα πολ/σμών:

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ώστε } \underline{L_1 \cdot P_1 Ax = L_1 \cdot P_1 \cdot I_3}$$

Ισοδύναμα, έχουμε το σύστημα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 11/2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} X_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο επόμενο βήμα εντοπίζω το max στοιχείο της $2^{ης}$ στήλης

$|6|>|2|>|1|$ και χρησιμοποιώ τον μεταθετικό πίνακα,

$$P_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ώστε } \underline{P_2 L_1 P_1 Ax = P_2 L_1 P_1 I_3}$$

Άρα, θα προκύψει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 11/2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} X_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μηδενίζουμε τα στοιχεία κάτω από το 6, με τον πίνακα.

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \text{ ώστε } \underline{L_2 P_2 L_1 P_1 A = L_2 P_2 L_1 P_1 I_3}.$$

Ισοδύναμα, έχουμε το σύστημα.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 11/2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}, \text{ όπου } X_{3\times3} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Άρα, επιλύουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 11/2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{31} = 1 \Rightarrow x_{31} = \frac{1}{2} \\ 2x_{32} = 0 \Rightarrow x_{32} = 0 \\ 2x_{33} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_{33} = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{aligned} & x_{21} + \tfrac{11}{2}x_{31} = 0 \Rightarrow x_{21} = -\tfrac{11}{4} \\ & x_{22} + \tfrac{11}{2}x_{32} = 1 \Rightarrow x_{22} = 1 \\ & x_{23} + \tfrac{11}{2}x_{33} = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow x_{23} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{12} \Rightarrow \\ & \Rightarrow x_{23} = \tfrac{5}{12} \end{aligned}$$

και

$$\begin{cases} 2x_{11} + 6x_{21} + 3x_{31} = 0 \Rightarrow 2x_{11} - \frac{33}{2} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_{11} = \frac{15}{2} \\ 2x_{12} + 6x_{22} + 3x_{32} = 0 \Rightarrow 2x_{12} + 6 + 0 = 0 \Rightarrow x_{12} = -3 \\ 2x_{13} + 6x_{23} + 3x_{33} = 1 \Rightarrow 2x_{13} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_{13} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

β) Η διαδικασία της μετάθεσης έγινε στο (α)

$$Ax = I \Leftrightarrow LUx = I \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = I & ① \\ Ux = y & ② \end{cases} \quad (*)$$

ΓΕΝΙΚΑ:

$L = (L_2 \cdot L_1)^{-1}$

Αλλά, για να μην βρίσκουμε τους L_1 & L_2, μετά το γινόμενό τους και αργότερα τον αντίστροφο μαθαίνουμε ότι ο L θα έχει τους αντίθετους από τους πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήσαμε. Άρα, εδώ είναι:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$ ← Δηλ. οι αντίθετοι των πολ/στων των πινάκων L_1 & L_2.

και ο πίνακας U είναι ο τελικός τριγωνοποιημένος A

Άρα, $U = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ώστε $LU = A$

Άρα, η (*) είναι:

① $L \cdot y = I \Rightarrow$ βρίσκουμε τα y στοιχεία του πίνακα και αντικαθιστώντας στην ② βρίσκουμε τα x στοιχεία

Έτσι, ο πίνακας X^t που θα προκύψει θα είναι ο ζητούμενος αντίστροφος